航空宇宙工学実験２

宇宙ロボットの姿勢制御実験

首都大学東京　システムデザイン学部

航空宇宙システム工学コース

教授　小島広久

助教　吉村康広

1　実験の背景と目的

1.1　はじめに

1980 年頃に，マニピュレータと呼ばれる多リンク結合からなるアームが衛星本体に付属して構成される宇宙ロボットが考案され，宇宙ステーションの建設及びメンテナンス，宇宙デブリの回収，故障人工衛星の捕獲修理など幅広い応用が期待された．それにともない，宇宙ロボットの運動と制御に関する研究が盛んに行われ，1990 年頃に多くの研究結果が報告されている．本実験では，特に宇宙ロボットの姿勢制御問題に着目し，それに取り組むことで，この問題の背景にある力学的原理とその工学的有用性を明らかにし，理解することを目的とする．また，地上において宇宙ロボットなど，宇宙機のダイナミクスを実験的に模擬しその挙動を観測する手法を学ぶ．

宇宙ロボットの運動では，固定されたベースが存在しないことが地上ロボットとの運動と大きく異なる点である．外力 (固定ベースの反作用) が働かないので，宇宙ロボットの系の運動量は保存される．よって，マニピュレータを動かすと系の角運動量が一定という拘束から本体の姿勢がそれに伴って変動する．よって，地上ロボットのマニピュレータを操作するのと同様の方法で宇宙ロボットのマニピュレータは制御できない．宇宙ロボットの本体姿勢とマニピュレータを所望の状態へ操作するには，より複雑な運動解析が必要となる．

本実験では，宇宙ロボットの系に外力は働かず，系全体の角運動量は保存されているものとする．その上で，マニピュレータをどのように動かせば本体の姿勢が変化するのか，この関係を調べる．これには工学的に重要な意味がある．一般に宇宙ロボット，衛星などの宇宙機本体には姿勢制御用アクチュエータとして，スラスタなどが備えられる場合が多い．ただし，使用できる推進剤の量には限りがある．一方，マニピュレータの可動リンクにあるモータは電力で動くので，太陽電池パネルなどからの電力供給がある限り使用量に制限はない．よって，スラスタのような外力アクチュエータを用いて本体姿勢を制御するのではなく，マニピュレータの運動によって本体姿勢を制御することが可能であれば，推進剤の節約によるミッションの長寿命化，低コスト化などが期待できる．また，スラスタや他の姿勢制御アクチュエータが故障した場合におけるアクチュエータの冗長性という点でも意味をもつ．

以上のような工学的利点により角運動量一定という拘束のもとにおける宇宙ロボットの本体姿勢とマニピュレータの運動の関係について調べるが，実はこの問題には，工学的有意義性に加えて拘束力学系と呼ぶ制御における理論的重要性も含まれている．角運動量保存則は宇宙ロボットの運動に対して，非ホロノミックとよばれる積分不可能な拘束条件となっている．積分不可能であることが運動に対して自由度を残しており，それを積極的に利用することで，上記のような工学的利点が得られる．本実験で扱う問題は，拘束を有する力学系の運動解析の代表例になっているので，この理論的背景の勉強として役に立つ．

また，本実験では 3 種類のセンサ（ジャイロ，磁気センサ，カラーマーカ位置測定）を使って，本体姿勢およびアーム角度について計測を行うことで，各センサの特性についても学ぶことを目的とする．

1.2　問題設定

本実験では，基礎的な研究成果を習得するため，宇宙ロボットの運動を 2 次元平面運動に限定し，初期角運動量はゼロとし，外力は働かないものと仮定する (図 1)．Link 1 と Link 2 にステッピングモータが設置されており，任意の回転速度を入力として加えることができる．ある既知の入力を与えたとき，本体姿勢がどのように変動するかを実験的に観測し，マニピュレータのリンク角が描く軌跡と本体の姿勢変動角との関係を理論的に明らかにする．

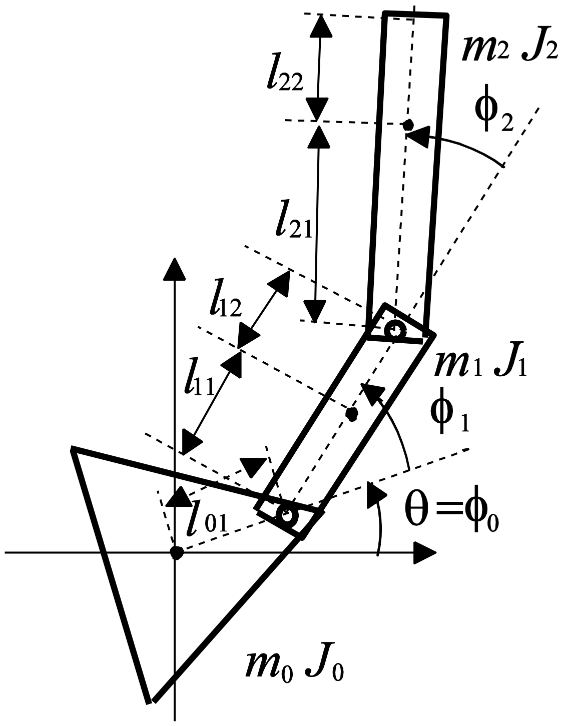

図 1: 平面宇宙ロボットのモデル

2 実験

2.1 実験装置

微小重力状態を地上で模擬することは非常に難しいことであるが，宇宙環境で動作する機械システムを研究する上で避けて通ることのできない問題である．本実験では図 2 に示すような水平ガラス盤上において，樹脂製ボールベアリングを敷き詰めることにより，摩擦の少ない状態を実現する．これにより，二次元的に微小重力環境の模擬が可能となる．マニピュレータの各リンクは制御用 PC から与えられる信号より，ステッピングモータで駆動される．宇宙ロボットの運動は実験室の天井に取り付けられた WEB カメラにより撮影され，色情報による領域抽出を用いたトラッキングシステム（NEKOsystem）により動作情報を取得する．また，宇宙ロボット本体に搭載された 9 軸ワイヤレスモーションセンサ（ZMP 製 IMU-Z2，以下 IMU と呼ぶ）により，本体姿勢情報などの記録を行う．

2.2 実験手順

1. 計測装置準備
   (NEKO, IMU) システムの操作法を巻末の付録にそれぞれ示す.

2. 実験装置準備，宇宙ロボットのモデルのハードウエア準備
   1). 乾電池，電源接続（ドライバ，エンコーダ）
   2). フライとフロアのベアリング確認
   3). 関節部固定確認

3. 宇宙ロボットモデルのソフトウエア準備
   1). デスクトップ>student_experiment フォルダを開く

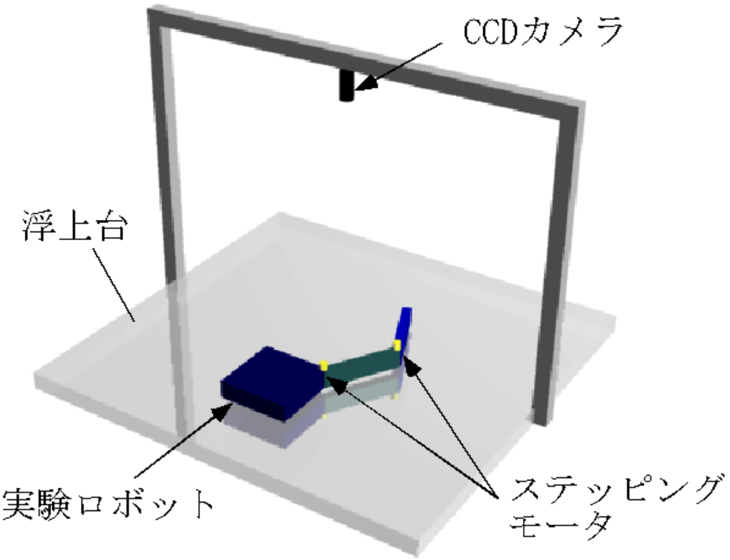

図 2: 実験装置概観

2). NEKOsystem 操作

4. 計測開始
宇宙ロボットモデル動作開始
待機状態のパソコンに対して，実験開始を指令しながら
実行ファイルクォーテーション”student_experiments” をダブルクリック (開始後不都合の時は”×” クリック)

5. 計測系停止，データ保存確認.

6. 実験終了（自動）
コマンドプロンプト画面上で任意の文字を入力し，Enter キー (続ける場合は 2 に戻る) を押す.

パソコンの電源 OFF

2.3 実験装置のシステムパラメータ

実験装置のパラメータを表 1 に示す.

2.4 実験で用いる制御入力

第一関節部分 (Link1):

$$\phi_1 = -50\left[\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{4\pi t}{20}+\cos\frac{3\pi}{4}\left(1-\cos\frac{4\pi t}{20}\right)\right]$$
$$\dot{\phi}_1 = -50\left[\frac{4\pi}{20}\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{4\pi t}{20}+\frac{4\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{4\pi t}{20}\right]$$

表 1: システムパラメータ

記号	値
m_0	2.280 [kg]
m_1	0.922 [kg]
m_2	0.493 [kg]
l_{01}	0.125 [m]
l_{11}	0.283 [m]
l_{12}	0.017 [m]
l_{21}	0.270 [m]
l_{22}	0.030 [m]
J_0	0.03585 [kgm^2]
J_1	0.00410 [kgm^2]
J_2	0.00324 [kgm^2]

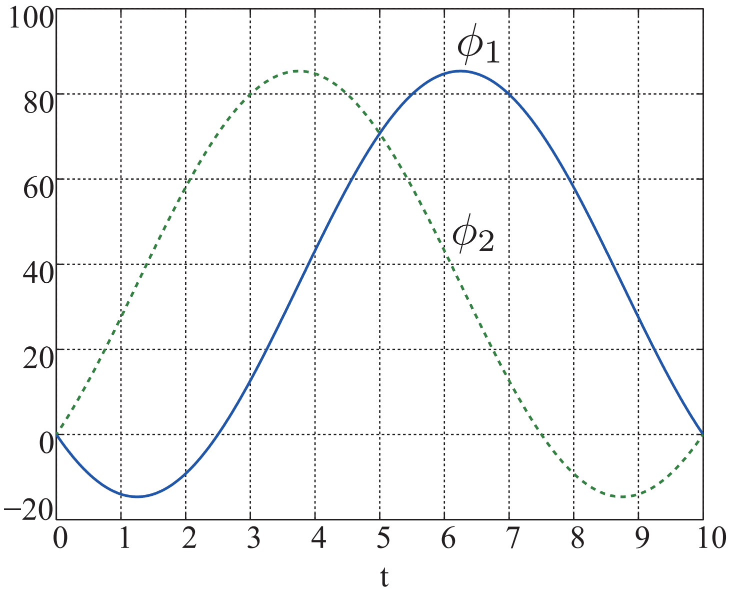

図 3: 1 周期の制御入力

第二関節部分 (Link2):

$$\phi_2 = -50\left[\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{4\pi t}{20} - \sin\frac{3\pi}{4}\left(1-\cos\frac{4\pi t}{20}\right)\right]$$

$$\dot{\phi}_2 = -50\left[\frac{4\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{4\pi t}{20} - \frac{4\pi}{20}\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{4\pi t}{20}\right]$$

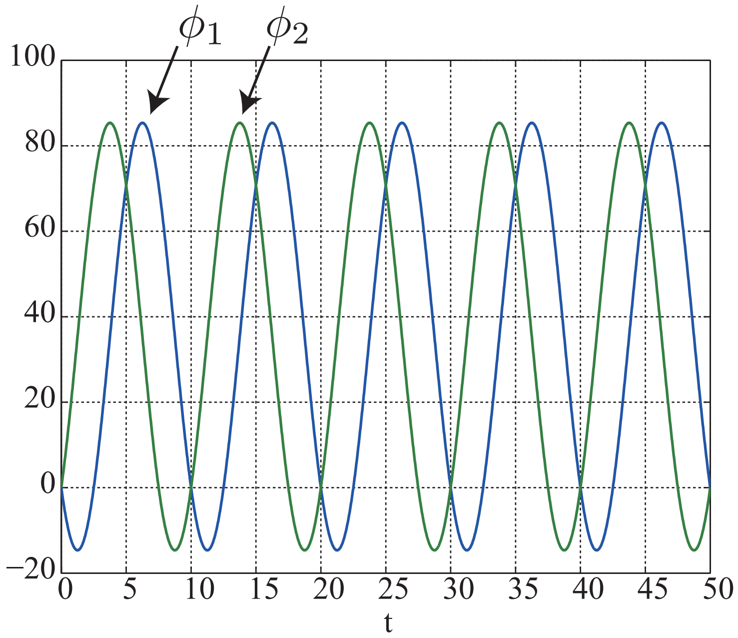

図 4: 5 周期の制御入力 (マニピュレータのリンク角の時間履歴)

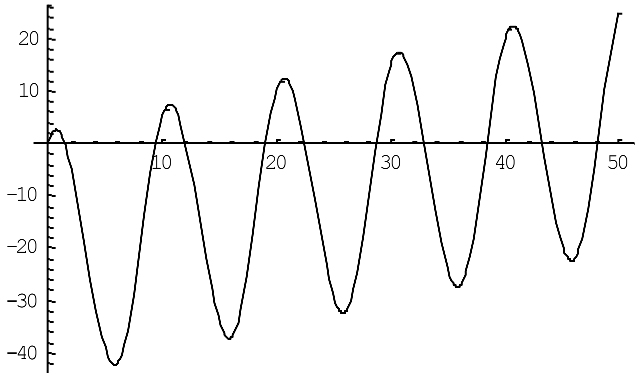

図 5: 本体姿勢角の時間履歴 (理論値)

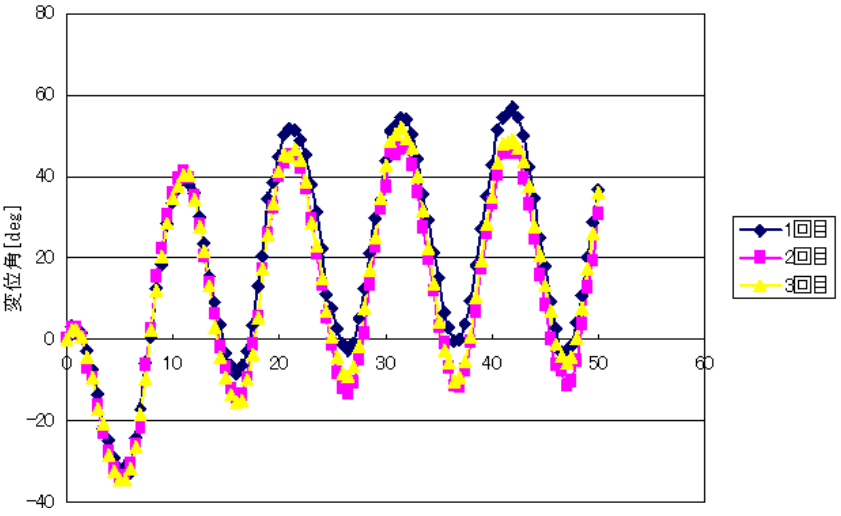

図 6: 本体姿勢角の時間履歴 (実験値)

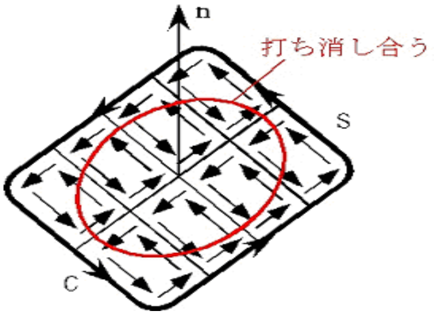

図 7: ストークスの定理

3　ストークスの定理

ベクトル $\mathbf{A}$ の場の中に閉曲線 C をとり，これを境界とする任意の曲面を S とする． 曲線 C に沿ってまわる向きと S の法線の向き $\mathbf{n}$ とは右ネジの関係にあるものとする．このとき

$$\Delta_C\, \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \Lambda_S\, (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1}$$

が成り立つ．これをストークスの定理という．ここで，$\mathrm{d}\mathbf{S}$ は曲面 S の微小部分で大きさはその面積に等しく，向きはその法線の向きとする．右辺の $\nabla \times \mathbf{A}$ はベクトル場の回転の度合いを表すベクトル量である．それが $\mathbf{n}$ との内積により曲面法線方向回りの成分だけが抽出されたスカラー量になる．図 7 に示すように S を網目状の微小部分に分けたとき，各微小部分は平面と考えられ，それぞれの回転度合いの和を考えると，内部にある曲線部分に沿う線積分は互いに打ち消しあって，C に沿う線積分が残ることになる．

課題 1

下記の実験結果・解析結果のグラフを PPT にまとめたものを USB メモリに入れ，2 週目開始時に持参すること．
1. 本体の姿勢変動の時間履歴（磁気センサ，ジャイロ，カラーセンサ）: 腕の周回回数ごと
2. カラーセンサによるリンク角（ϕ_1, ϕ_2）の時間履歴 : 腕の周回回数ごと

データフォーマットと単位（平面宇宙ロボット）
・磁気・ジャイロセンサの測定結果ファイル
時刻 t[ms], 角速度 w[deg/s], 磁気ベクトル x[G]，磁気ベクトル y[G]
・ カラ―マーカの測定結果ファイル
　t[sec] Rx[pixel] Ry[pixel] Gx[pixel] Gy[pixel] Bx[pixel] By[pixel]

以上，第 1 週

課題 2

ストークスの定理を使って，アームの周期的な動きに対する本体姿勢の変化を説明しなさい．

課題 3

以下のテーマの中から，実験担当者の指示があったものに関して，資料，文献など調査のうえその概要と特徴をまとめよ．形式は自由とする．
画像処理手法について / 時間遅れについて / 数値積分 / 制御工学におけるフィルタ / 宇宙機ダイナミクスの地上実験手法について

レポートの提出について

各自，実験レポートを作成し，期限までに本棟事務前ポストに提出.

1. ジャイロ単体実験：null offset，サンプリング周期，移動平均フィルタによる違い
2. 平面宇宙ロボット：課題 1，2，3

実験レポートには 1. 目的，2. 実験方法，3. 結果，4. 考察，5. 結論，6. 参考文献　の項目を必ず書くこと.

4　宇宙ロボットの角運動量保存式

宇宙空間に浮かんでいる n リンク系の宇宙ロボットを考える．質量 m の質点が基準点 O から位置ベクトル $\mathbf{r}$ にあるとき，その角運動量は

$$\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \tag{2}$$

である．図 1 に示される 2 次元平面宇宙ロボットの各リンク質量は

$$m_i = \Delta_{S_i}\, \rho_i(s)\mathrm{d}s \tag{3}$$

と表される．ここで，ρ_i, S_i はそれぞれリンクの質量密度，平面領域である．重心位置ベクトルを $\mathbf{g}_i$ とすると，

$$m_i\mathbf{g}_i = \Delta_{S_i}\, \rho_i\mathbf{r}_i\mathrm{d}s \tag{4}$$

が成り立つ．

点 G 周りの角運動量を P_G とする．n リンク系では，

$$P_G = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{S_i}\, \mathbf{r}_i \times \rho_i\dot{\mathbf{r}}_i\mathrm{d}s \tag{5}$$

となる．ここで，

$$\Delta_{S_i}\, \mathbf{r}_i \times \rho_i\dot{\mathbf{r}}_i\mathrm{d}s = \Delta_{S_i}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_i\right) \times \rho_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{g}}_i + \dot{\mathbf{g}}_i\right) \tag{6}$$

とおき，展開すると

$$P_G = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{S_i}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{g}_i\right) \times \rho_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{g}}_i\right)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i \times m_i\dot{\mathbf{g}}_i \tag{7}$$

となる．ここで，式変形に式 (3),(4) を用いた．さらに，$\mathbf{r}_i - \mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} l_i\cos\theta_i & l_i\sin\theta_i \end{bmatrix}^T$ のように極座標を用いれば，

$$\begin{aligned}
\Delta_{S_i}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{g}_i\right) \times \rho_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{g}}_i\right)\mathrm{d}s &= \Delta_{S_i}\begin{bmatrix} l_i\cos\theta_i \\ l_i\sin\theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \times \rho_i \begin{bmatrix} -l_i\dot{\theta}_i\sin\theta_i \\ l_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}s &(8)\\
&= \Delta_{S_i}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_i l_i^2\dot{\theta}_i \end{bmatrix}\mathrm{d}s &(9)\\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_i\dot{\theta}_i \end{bmatrix} &(10)
\end{aligned}$$

となる．したがって，式 (7) は次のように表される．

$$P_G = \sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_i\dot{\theta}_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i \times m_i\dot{\mathbf{g}}_i \tag{11}$$

式 (11) は点 G からの位置ベクトル $\mathbf{g}_i$ が必要であるため，任意の点 O からの各リンクの重心位置ベクトル $\mathbf{r}_g^i$ と重心 G のベクトルを $\mathbf{r}_G$ とおき，式変形を行う．

全質量を M とすると，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i \times m_i\dot{\mathbf{g}}_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{r}_g^i - \mathbf{r}_G\right) \times m_i\left(\dot{\mathbf{r}}_g^i - \dot{\mathbf{r}}_G\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_g^i \times m_i\dot{\mathbf{r}}_g^i - \mathbf{r}_G \times M\dot{\mathbf{r}}_G
\end{aligned}$$

となる．具体的に

$$\mathbf{r}_g^i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 0 \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} X & Y & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$X = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{14}$$

$$Y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \tag{15}$$

とおき，計算すると，式 (11) の第３成分は

$$P_G^z = \sum_{i=1}^{n} J_i\dot{\theta}_i + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i\right) - M\left(X\dot{Y} - \dot{X}Y\right) \tag{16}$$

と表される．

実験機の構成にしたがい，以下では３リンク $(i = 0, 1, 2)$ の場合を考える．重心座標 X, Y を x_i, y_i, m_i を用いて表し，まとめると

$$\begin{aligned} P_G = {} & J_0\dot{\theta}_0 + J_1\left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1\right) + J_2\left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2\right) \\ & + \frac{1}{M}\left\{m_0 m_1\left[\left(x_1 - x_0\right)\left(\dot{y}_1 - \dot{y}_0\right) - \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_0\right)\left(y_1 - y_0\right)\right]\right\} \\ & + \frac{1}{M}\left\{m_0 m_2\left[\left(x_2 - x_0\right)\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_0\right) - \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_0\right)\left(y_2 - y_0\right)\right]\right\} \\ & + \frac{1}{M}\left\{m_1 m_2\left[\left(x_2 - x_1\right)\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right) - \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)\left(y_2 - y_1\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

となる．さらに，図１に示される記号と座標系を用いて，宇宙ロボットの角運動量保存式をリンクの角度 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 で表すことを考える．基準点を宇宙機本体の重心にとり，式 (17) における $x_i, y_i (i = 0, 1, 2)$ をリンク長で表すと，

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{01}\cos\phi_0 + l_{11}\cos\left(\phi_0 + \phi_1\right) \\ l_{01}\sin\phi_0 + l_{11}\sin\left(\phi_0 + \phi_1\right) \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + l_{12}\cos\left(\phi_0 + \phi_1\right) + l_{21}\cos\left(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2\right) \\ y_1 + l_{12}\sin\left(\phi_0 + \phi_1\right) + l_{21}\sin\left(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2\right) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}_0 l_{01}\sin\phi_0 - \left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1\right) l_{11}\sin\left(\phi_0 + \phi_1\right) \\ \dot{\phi}_0 l_{01}\cos\phi_0 + \left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1\right) l_{11}\cos\left(\phi_0 + \phi_1\right) \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - \left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1\right) l_{12}\sin\left(\phi_0 + \phi_1\right) - \left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2\right) l_{21}\sin\left(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2\right) \\ \dot{y}_1 + \left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1\right) l_{12}\cos\left(\phi_0 + \phi_1\right) + \left(\dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2\right) l_{21}\cos\left(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2\right) \end{bmatrix} \tag{23}$$

となる．これらを式 (17) に代入し，初期角運動量が 0 の場合を考えると次のようになる．

$$P_G^z = a\left(\phi_1, \phi_2\right)\dot{\phi}_0 + b\left(\phi_1, \phi_2\right)\dot{\phi}_1 + c\left(\phi_1, \phi_2\right)\dot{\phi}_2 = 0 \tag{24}$$

ここで，

$$a\left(\phi_1, \phi_2\right) = J_0 + J_1 + J_2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{M}\left\{m_0 m_1\left(l_{01}^2+l_{11}^2\right)+m_2\left[m_0\left(l_{01}^2+\left(l_{11}+l_{12}\right)^2+l_{21}^2+2 l_{01} l_{21} \cos \left(\phi_1+\phi_2\right)\right)\right.\right. \\
&+m_1\left(l_{12}^2+l_{21}^2\right) \\
&+2\left(m_0\left(l_{11}+l_{12}\right)+m_1 l_{12}\right) l_{21} \cos \phi_2] \\
&+2 m_0 l_{01}\left(m_1 l_{11}+m_2\left(l_{11}+l_{12}\right)\right) \cos \phi_1\} \\
b\left(\phi_1, \phi_2\right) \;=\; & J_1+J_2 \\
&+\frac{1}{M}\left\{m_0 m_1 l_{11}^2+m_2\left[m_0\left(\left(l_{11}+l_{12}\right)^2+l_{21}^2+l_{01} l_{21} \cos \left(\phi_1+\phi_2\right)\right)\right.\right. \\
&+m_1\left(l_{12}^2+l_{21}^2\right)+2 l_{21} \cos \phi_2\left(m_0\left(l_{11}+l_{12}\right)+m_1 l_{12}\right)] \\
&+m_0 l_{01} \cos \phi_1\left(m_1 l_{11}+m_2\left(l_{11}+l_{12}\right)\right)\} \\
c\left(\phi_1, \phi_2\right) \;=\; & J_2+\frac{1}{M}\left\{m_2 l_{21}\left(\left(l_{21}+\left(l_{11}+l_{12}\right) \cos \phi_2+m_0 l_{01} \cos \left(\phi_1+\phi_2\right)\right)+m_1\left(l_{21}+l_{12} \cos \phi_2\right)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

とおいた．

式 (24) からわかるように，a, b, c は ϕ_1, ϕ_2 を変数とし，他は定数からなる関数である．以上より，$\phi_0\left(=\theta_0\right), \phi_1, \phi_2$ からなる関係式 (24) をえることができた．ϕ_1, ϕ_2 はステッピングモータを用いて任意に変動できる．ある ϕ_1, ϕ_2 の軌道が与えられたとき，本体姿勢角 θ_0 がどのように変動するかを明らかにしたい．式 (24) はその目的に対してよい見通しを与えていることがわかる．

5　本体姿勢変動の解析

宇宙ロボットの角運動量保存式は式 (24) で与えられた．これを次式のように変形する．

$$\dot{\theta}_0=-I_{01} \dot{\phi}_1-I_{02} \dot{\phi}_2 \tag{25}$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
I_{01} &= \frac{b\left(\phi_1, \phi_2\right)}{a\left(\phi_1, \phi_2\right)} \\
I_{02} &= \frac{c\left(\phi_1, \phi_2\right)}{a\left(\phi_1, \phi_2\right)}
\end{aligned}
$$

である．ここで，マニピュレータのリンク角に周期入力を与えることで，本体とマニピュレータの初期の相対姿勢と終端の相対姿勢が同じになる場合を考える．1 周期入力時の運動において，初期時間から終端時間まで式 (25) を積分すると次式がえられる．

$$\Delta_0^{t_f} \dot{\theta}_0 \mathrm{d} t=-\Delta_0^{t_f}\left(I_{01} \frac{\mathrm{d} \phi_1}{\mathrm{d} t}+I_{02} \frac{\mathrm{d} \phi_2}{\mathrm{d} t}\right) \mathrm{d} t \tag{26}$$

周期入力を与えた場合，ϕ_1, ϕ_2 は $\phi_1-\phi_2$ 平面上で閉曲線を描くことに注意すると，式 (26) の右辺はある閉曲線 C を与えた場合におけるその線積分に対応していることがわかる．よって次式をえる

$$\theta_0\left(t_f\right)-\theta_0\left(t_0\right)=-\Delta_{\partial C}\left(I_{01} \mathrm{d} \phi_1+I_{02} \mathrm{d} \phi_2\right) \tag{27}$$

式 (27) の右辺にストークスの定理を用いると，

$$\Delta \theta_0=-\Lambda_S\left(\frac{\partial I_{02}}{\partial \phi_1}-\frac{\partial I_{01}}{\partial \phi_2}\right) \mathrm{d} \phi_1 \wedge \mathrm{d} \phi_2 \tag{28}$$

をえる．$\Delta \theta_0$ は 1 周期の制御入力で生じた本体の姿勢変動角である．$\mathrm{d} \phi_1 \wedge \mathrm{d} \phi_2$ の大きさは面積に等しく，その向きは法線方向となっている．

被積分関数 $F=\left(\frac{\partial I_{01}}{\partial \phi_2}-\frac{\partial I_{02}}{\partial \phi_1}\right)$ とおく．図 8 の鉛直軸は F の値を示している．したがって，$\phi_1-\phi_2$ 平面上である閉曲線 C を描くような周期入力を与えた場合，式 (28) の右辺より，その閉曲面と高さ F で囲まれる体積が本体の姿勢変動角と等しいことがわかる．これにより，閉曲線 C を適当に選ぶことで，宇宙ロボットの本体及びマニピュレータの姿勢を所望の状態に変化させる制御則が設計できる．

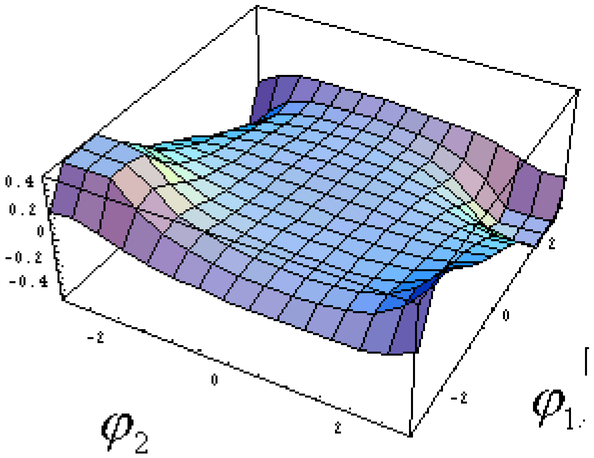

図 8: 計算例

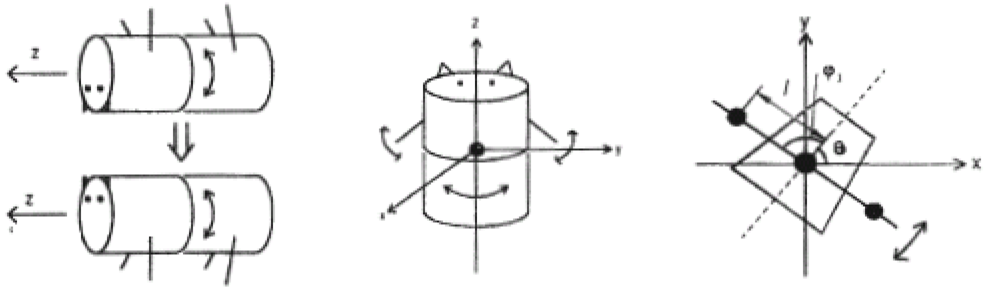

図 9: 簡略化猫モデル

[参考]

動物の猫が背中を下にして逆さまの状態で落下した際に行う「猫ひねり」を身近に観察することができる．手足を振り，上体をひねらせ体全体を回転させ，きちんと着地する動作のことである．この運動も角運動量保存という非ホロノミック拘束を利用した一例になっている．

簡略化された猫モデル (図 9 の右端) の角運動量保存の式は次式で表される．

$$I_0\dot{\theta}_0 + \left(I_1 + ml^2\right)\left(\dot{\theta}_0 + \dot{\phi}_1\right) = 0 \tag{29}$$

これより

$$\dot{\theta}_0 = -\frac{I_1 + ml^2}{I_0 + I_1 + ml^2}\dot{\phi}_1 \tag{30}$$

がえられる．ここで，腕の状態がある初期状態から，適当な運動を行った後，元の状態に戻る場合を考える．このとき，変数 l, ϕ_1 は $l - \phi_1$ 平面上で閉曲線を描く．そのときの閉曲線を s，閉曲線によって囲まれる領域を Ω とすると，ストークスの定理を用いて本体の姿勢角変動は次式で表される．

$$\begin{aligned} \theta_0\left(t_f\right) - \theta_0\left(t_0\right) &= -\Delta_S\, I_{01}\mathrm{d}\phi_1 \\ &= -\Lambda_\Omega \frac{\partial I_{01}}{\partial l}\mathrm{d}\phi_1\mathrm{d}l \end{aligned} \tag{31}$$

ただし，$I_{01} = -\frac{I_1+ml^2}{I_0+I_1+ml^2}$ である．

6　拘束条件の積分可能性

6.1　拘束条件

ホロノミックな拘束とは，一般化座標を $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，時間を t とした時に次のように表される拘束をいう．

$$h(\mathbf{x}, t) = 0 \in \mathbb{R}^m \tag{32}$$

ここで $m \leq n$ とし，h の $\mathbf{x}$ に関するヤコビアン行列はフルランクであると仮定する．これは式 (32) に含まれる m 個の式が独立な拘束であることを意味する．陰関数定理によれば，この場合，式 (32) を用いて m 個の一般化座標を解くことができる．この低次元化によって，システム全体の挙動を拘束条件を持たない $n-m$ 個の独立な一般化座標で記述できる．このとき自由度は $n-m$ 個となる．

拘束条件が式 (32) のような代数方程式でなく

$$h(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t) = 0 \in \mathbb{R}^m \tag{33}$$

のような微分方程式で表されることがある．もし式 (33) が式 (32) のような形式に帰着できるならば，その拘束は積分可能であるという．このとき当然，拘束はホロノミックである．式 (33) が式 (32) の形式に帰着できないとき，拘束は積分不可能で非ホロノミックという．拘束が非ホロノミックな場合には，拘束条件から一般化座標の一部を消去して低次元化を図ることはできない．見方を変えると，自由度が残されている．

不等式を含む拘束条件も非ホロノミックである．また，時間 t を陽に含む拘束をレオノーマス，そうでない拘束をスクレロノーマスという．以下ではスクレロノーマスに限り議論を進める．

6.2　非ホロノミックの例

右図の二輪車の運動方程式を考えよう．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \tag{34}$$

拘束条件 (車輪と垂直方向の速度が 0，横滑りしない条件)

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0 \tag{35}$$

これは非ホロノミック拘束となる．

仮に θ を変数ではなく定数とみなすと式 (35) は積分可能でホロノミック拘束になる．つまり，式 (35) を積分することで，ホロノミック拘束 $y = \alpha x$(α は定数) に変形できる．この拘束条件下では直線運動しかできないことがわかる．(自由度が低減されている．)

6.3　フロベニウスの定理

$x \in U$ におけるベクトル場 $g_i(x)$ が与えられた場合

$$span\left(\Delta(x)\right) : \Delta(x) = \left(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)\right) \tag{36}$$

を Distribution という．Distribution はそれを構成するベクトル場の任意の Lie bracket が自分自身で張られる，すなわち，

$$\left[g_i(x), g_j(x)\right] \in span\left(\Delta(x)\right) (\forall i, j) \tag{37}$$

のとき involutive であるという．ただし，$\left[g_i(x), g_j(x)\right] := \frac{\partial g_j}{\partial x} g_i - \frac{\partial g_i}{\partial x} g_j$ である．

Frobenius の定理

$x \in U$ で正則な Distribution $span\,(\Delta\,(x))$ がそこで完全に積分可能なための必要十分条件は，それ自身が involutive であることである．

6.4 積分可能性とフロベニウスの定理

拘束条件

$$a\,(x)\,\mathrm{d}x_1 + b(x)\mathrm{d}x_2 + c(x)\mathrm{d}x_3 = 0 \tag{38}$$

が積分可能かどうか検討する．

任意の $w(x) \neq 0$ に対して

$$w(x)a(x)\mathrm{d}x_1 + w(x)b(x)\mathrm{d}x_2 + w(x)c(x)\mathrm{d}x_3 = 0 \tag{39}$$

$$w(x)a(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, w(x)b(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_2}, w(x)c(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} \tag{40}$$

を満足する $w(x), h(x)$ が存在すれば，式 (39) は $\mathrm{d}h(x) = 0$ と $h(x)$ の全微分で与えられ，$h(x) = C$(積分定数) のように積分可能となる．($w(x)$ を積分因子という．)

解析学の結果より，$h(x)$ の存在条件は

$$\frac{\partial\,(wb)}{\partial x_1} = \frac{\partial\,(wa)}{\partial x_2}, \frac{\partial\,(wc)}{\partial x_2} = \frac{\partial\,(wb)}{\partial x_3}, \frac{\partial\,(wa)}{\partial x_3} = \frac{\partial\,(wc)}{\partial x_1} \tag{41}$$

である．部分微分してまとめると，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial b(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial a(x)}{\partial x_2}\right) w(x) &= \frac{\partial w(x)}{\partial x_2} a(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x_1} b(x) \\
\left(\frac{\partial c(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial b(x)}{\partial x_3}\right) w(x) &= \frac{\partial w(x)}{\partial x_3} b(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x_2} c(x) \\
\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial c(x)}{\partial x_1}\right) w(x) &= \frac{\partial w(x)}{\partial x_1} c(x) - \frac{\partial w(x)}{\partial x_3} a(x)
\end{aligned} \tag{42}$$

となる．各辺 $c(x), a(x), b(x)$ 倍して，$w(x)$ の項を消去すると，

$$w(x)\Gamma(x) = 0 \tag{43}$$

となる．ただし，

$$\Gamma(x) = \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial a(x)}{\partial x_2}\right) c(x) + \left(\frac{\partial c(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial b(x)}{\partial x_3}\right) a(x) + \left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial c(x)}{\partial x_1}\right) b(x)$$

である．$w(x) \neq 0$ より，$\Gamma(x) = 0$ が $h(x)$ が存在するための必要十分条件となっている．

ここで簡単のため $c(x) \neq 0$ とする．行列

$$A := \begin{bmatrix} c & 0 & -\frac{\partial c}{\partial x_2} + \frac{\partial c}{\partial x_3} b \\ 0 & c & \frac{\partial c}{\partial x_1} c - \frac{\partial c}{\partial x_3} a \\ -a & -b & -\left(\frac{\partial b}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_2}\right) c + \frac{\partial b}{\partial x_3} a - \frac{\partial a}{\partial x_3} b \end{bmatrix}$$

を定義し，行列式を計算すると，実は

$$\det A = c^2(x)\Gamma(x) \tag{44}$$

となっていることが確かめられる．

この行列 A の第一列目と第二列目を $g_1(x), g_2(x)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &:= \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \\
g_2(x) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

である．実はベクトル $g_1(x), g_2(x)$ は拘束式 (38) の係数から成るベクトル $\begin{bmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \end{bmatrix}^T$ の零化空間となっている．

係数ベクトルの零化空間とは次式が示すように，係数ベクトルにあるベクトルをかけること，その積が 0 となるようなベクトルから構成される空間である．

$$
\begin{bmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ -a & -b \end{bmatrix} = 0 \tag{45}
$$

明らかに $g_1(x), g_2(x)$ は $\begin{bmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \end{bmatrix}$ の零化空間となっている．また，行列 A の第三列目は $g_1(x), g_2(x)$ の Lie bracket で与えられている．

$$
\begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} := \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial c}{\partial x_2} c + \frac{\partial c}{\partial x_3} b \\ \frac{\partial c}{\partial x_1} c - \frac{\partial c}{\partial x_3} a \\ -\left(\frac{\partial b}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_2} \right) c + \frac{\partial b}{\partial x_3} a - \frac{\partial a}{\partial x_3} b \end{bmatrix} \tag{46}
$$

つまり，行列 A は式 (38) の係数ベクトルの零化空間であるベクトルを 2 つ選び，それを第一列目と第二列目に配置し，それらの Lie bracket を第三列目に配置することで構成された行列である．このような作業で行列 A を構成すると，その行列式は式 (44) で与えられることは，すでに述べたとおりである．

$h(x)$ が存在するための必要十分条件は $\Gamma(x) = 0$ であったので，このとき式 (44) より

$$
\det A = 0 \tag{47}
$$

である．ゆえに各列ベクトルは線形従属である．$g_1(x), g_2(x)$ は明らかに線形独立なので，$\begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix}$ が $g_1(x), g_2(x)$ に従属な関係となっている．つまり，

$$
\begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix} \in span\left(g_1(x), g_2(x)\right) \tag{48}
$$

である．したがって，$\begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix}$ が $span(g_1(x), g_2(x))$ で張られているので，$span(g_1(x), g_2(x))$ は involutive である．それゆえ，積分可能であるための条件，$h(x)$ の存在性は $span(g_1(x), g_2(x))$ が involutive であることと等価であることが示された．

A NEKO system 取扱説明書

概要：

NEKO system(Neko robot Experiment tracKing and Operation system) は猫ロボット実験支援システムです．色情報による領域抽出を用いた猫ロボット本体位置，アーム角度トラッキング，BlueTooth による IMU（角速度・磁気方位センサー）計測装置への指令を行います.

操作：

(1) システムのセットアップ

1. 実験用 PC（カラーセンサー用）に Web カメラ，IMU 用 PC で IMU に BlueTooh 接続します.
2. exp_NEKO フォルダを適当なディレクトリにおきます.
3. IMU のセットアップ．下記 IMU 操作参照

(2) 実験実施手順

1. exp_NEKO.exe を実行します.
2. コンソール画面で'c' を打ち込み，トラッキングに用いる色領域の設定を行います.
3. 再びコンソールから'd' を打ち込み，抽出領域を確認します.
4. 手順 2〜3 を繰り返し，猫ロボットに取り付けたマーカーを抽出し，かつそれ以外の領域を抽出しないような色領域を設定します.
5. コンソールから'C' を打ち込み，使用する COM ポートを設定します（COM1 と入力する．設定は保存されますのでアプリケーション起動の度に設定する必要はありません).
6. コンソールから's' を打ち込みます．新しく開いたダイアログから実験動画の圧縮方法を選択します（全画面未圧縮を選択）．Web カメラからの映像が新しく開いた画像ウインドウに表示され，赤，青，緑の円がトラッキング位置を示します.
7. 3 つの円が正しく猫ロボットマーカーをトラッキングしていることを確認した後，開いた画像ウインドウ上で's' を打ち込み，実験を開始します.
8. 画像ウインドウ上で'q' を打ち込み，実験を終了します.
9. コンソールに戻り，'q' を打ち込みアプリケーションを終了します.
10. exp_NEKO フォルダにトラッキング結果"result.csv" と動画"NEKO.avi"ができています.

エラーメッセージについて:

- "カメラが見つかりません":Web カメラが接続されていないか，他のアプリケーションによって使用されています.

備考:
現段階で exp_NEKO.exe の安定性は高くなく，まれに落ちることがあります．現在安定版を開発中です.

B　IMU 取扱説明書

概要：

IMU は磁気センサ，加速度センサ，ジャイロセンサを搭載した 9 軸計測装置です．ただし，本実験では 2 次元平面内の運動のみを扱うため，磁気方位センサ (x, y 方向) による姿勢角度計測，ジャイロセンサ (z 軸周り) による姿勢角速度計測のみ行います．データは，Bluetooth により受信します．

仕様：

電源電圧：3.3-15[V], センサ:3 軸加速度センサ (±2/4/8/16 [G]（切替可, 12[bit]),
3 軸ジャイロセンサ（±250/500/2000[deg/s]（切替可）、16[bit]）
3 軸地磁気センサ（±0.88〜8.1[gauss]（切替可）、12[bit] *）　（*サンプリングレートによる）
通信インターフェイス:Bluetooth Ver2.0+EDR Class1, CAN
サンプリングレート:加速度センサ : 最大 1[ms], ジャイロセンサ : 最大 3[ms], 地磁気センサ : 最大 6[ms]
重量:20[g]（電池、バンド含まず）

操作：

(1) 使用方法

1. 電池ボックスと IMU の接続を確認し，電池ボックスの電源を投入します．電源の正負に注意してください．
2. IMU 基板のスイッチを入れます．基板上の LED が点灯するのを確認します．
3. PC から Bluetooth 経由で IMU に接続し，右クリックの "詳細" から COM ポートの番号を確認します．
4. IMU-Z viewer を起動します．
5. File > PortSetting で先ほど調べた COM ポート番号を選択し，"Add->" で追加します．
6. 追加したポートが右の欄に表示され，3 つ並んだチェックボタンの最左にチェックが入っているかを確認します．"OK" をクリックします．
7. File > Open をクリックすると，センサデータが受信され始めます．

(2) ログの記録

1. 使用方法の手順 7 まで行います．
2. Log > Format Setting から Log file のパスを設定，Node No.1 をチェックし，
   Data type:では Timestamp, Gyroscope Z, Compass X, Compass Y だけにチェックを入れ，OK をクリックします．
3. Log > Start をクリックすると，ログの記録が始まります．
4. Log > Stop で終了し，File > Close でセンサデータの受信を止めます．

航空宇宙工学実験 2 資料その 2

ジャイロによる角速度検出

航空機，宇宙機では，その姿勢角，姿勢角速度を検出する必要がある．本実験では，角速度検出装置の一例としてシリコン振動ジャイロを用いた角速度検出を行う．

以下，シリコンセンシングシステムズジャパンホームページ

http://www.sssj.co.jp/sitemap/index.html

よりの抜粋を掲載する．

振動式ジャイロとは　—MEMS シリコンリングジャイロ

数あるジャイロ (Gyroscope) の方式の内，主に使用される「振動式」「機械式」「光学式」「流体式」を説明する．

振動式 Vibrating Structure Gyro

振動式とは，ある 1 方向に振動 (一次振動) する質量に角速度がつくと　「コリオリ」効果でそれに直行する方向にも振動（二次振動）が発生する事を利用したものです．一次励振には水晶や圧電素子がよく使われるので振動ジャイロ＝圧電ジャイロという誤解がありますが，圧電であるとは限りません．小型・量産化に有利ですが，質量を加振する（つまり音叉やビーム棒を振動させる）とき固定支点が必要となり，支点に外部震動や衝撃が加わると誤出力を出してしまう欠点があります．音叉・ビーム形状の振動ジャイロはこの構造的問題を抱えており，緩衝材を使うと応答性が減少するなど根本的な解決方法に乏しい現状である．

シリコンセンシングシステムズの振動式ジャイロは振動形態を棒（音叉やビーム形状）を上下左右に振るのでなく振動子リングを中吊りにしてリングを楕円歪に振動させるため根本構造として外来応力に敏感な支点が無い上，楕円振動は外部震動・衝撃下では起こりにくく，悪い環境下でも忠実に**高精度角速度の検出**ができるようになっています．これは理論上だけでなく実践でも証明されている．

機械式 Rate Gyro

機械式とは，コマが回っているものである．

電気ドリル（コマ）を手で傾けると直交方向に力がかかるのがわかる．この現象（歳差）を応用して角度変位を検知するものである．　（この点「ジャイロコンパス」と混同しないこと.「ジャイロコンパス」とは蝶番で懸架されたコマ軸が地球の自転軸と平行方向になりそれが維持されるのを利用した真方位を示す儀器であり，ここでいう歳差を利用して角度を検知するジャイロスコープ（ジャイロ）ではない.）

レートジャイロ Rate Gyroscope とは角速度を検出するジャイロスコープの総称である．レートジャイロを積分して角度を出すものは積分ジャイロである．

ジャイロは，歳差により角度を検出しますが，機械的拘束によるエラー要因がかなりある．したがいジンバル（蝶番懸架台）の自由度を精密機構で高めるより，コマ軸をバネで固定しバネ応力が角速度に比例することにて角速度を検知しそれを積分したほうが商品化し易いという発想がレートジャイロの起点となっている．今日ではジャイロといえばレートジャイロ（＝角速度センサー）であることが一般的解釈である．機械式ジャイロは精密機械なのでメンテナンスは必須である．Dynamically/Dry Tuned Gyroscope (DTG) というのは機械式ジャイロの一種で，コマが特定の回転速度に達すると軸の機械的拘束が極小になる機構になっているものである．

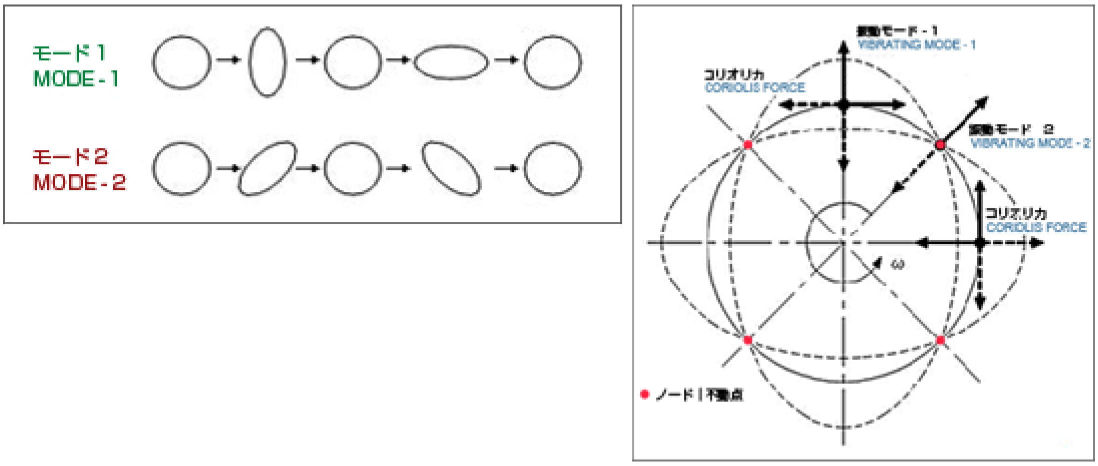

図 10: 角速度検出

光学式 RLG = Ring Laser Gyro, FOG = Fiber Optic Gyro

光学式とは，筐体内のミラーやファイバでレーザー光を周回させる． 筐体が方向を変えると内部で周回しているレーザーの発光から受光のタイミングが変わることを利用したものである．高精度で航空機などに使われています．レーザーやファイバに寿命がありメンテナンスが必要である．

流体式 Gas rate Gyro

流体式とは，筐体内でガスを熱線にスプレーするものである． 筐体が回るとスプレーがカーブするのを熱線温度で検知します．熱線に対するスプレー量の変化（流体挙動）がかなり微妙で念入りな補正が個別に必要であること，浮遊不純物によるスプレー流路への影響，微細スプレーポンプの安定性経年変化など，各種の課題に対する実績に乏しいため市場ではあまり一般的ではありません．製品の取付方向で流路が変わる．また，ノイズが多いといわれている．

振動式ジャイロの角速度検出の仕組み

1. 角速度検出体（リング振動子）を固有振動数に加振.（モード-1）
2. 角速度が加わると，振動モード-1 に対し，コリオリの力が働き，その結果新たに振動モード-2 が発生.
3. モード-1 の不動点（ノード）がモード-2 では動くのでそれをモニターすることによって，角速度を得る．
4. 楕円歪の振動形態は外乱要因では起こりにくいため外部衝撃・震動によるノイズが極少であり，本ジャイロは実際の使用環境での精度優位性を維持できる．
5. 更に，リング全体がスポークで中吊りになっており（振動が対象であることより）振動の支点も中吊りのため外部の衝撃・振動はリングに伝わりにくい．

使用するジャイロ

ハードウエア　SSSJ 社　CRS 03-02S シリコン振動ジャイロ　(Si-VSG)

法線軸周りの角速度を検出する．測定範囲は±100[deg/sec]

電源入力は 5 V で，2.5V をゼロとして検出した角速度を±2.5V として 0〜5V の範囲で返してくる．よって，2.5V が 100[deg/sec]，1 V が 40[deg/sec] に相当する．写真は，ジャイロを搭載した評価ボード．左上赤丸部分がシリコン振動ジャイロ．

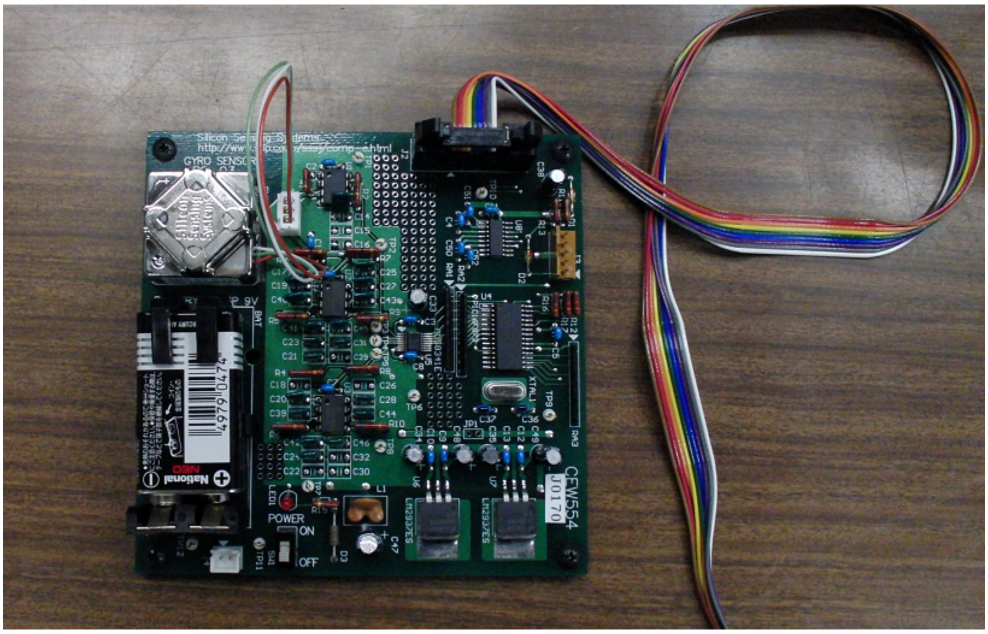

図 11: ジャイロセンサ概観

図 12: 評価ボードソフトウェア

データ取得・整理の課題

ソフトウエア上で各種パラメータを操作して，角速度検出の特性を確認する．

具体的には，データ取得のボタンをクリックした後，評価ボードを右に 90 度回転させ，その後に左に 90 度回転させ，元の姿勢に戻す．これを，回転速度を変化させて数回繰り返す.

1. サンプリング周波数
   50，100，200，500，　1k，2k[Hz] に設定できる．
2. Null offset 操作を行うと，無回転での電圧 (通常 2.5V 付近) が得られ，この値をゼロとして表示される．
3. 角速度を積分し，角度にして表示する．Null offset 操作が行われないと，オフセットによるドリフト（無回転時でも積分して得られる姿勢角が変化する）が発生し，角度が変化する．
4. 移動平均フィルタ
   インターバルを設定すると，検出した角速度に対して逐次移動平均をとり，平滑化を行う．インターバルの上限は，サンプリング周波数に依存する（0.1 秒分）．

課題

Null offset の有無，サンプリング周期による違い，移動平均フィルタの有無，段数による違いについてそれぞれグラフをまとめ，考察せよ．